Cadre : On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et on considère des fonction 2π-périodiques que l'on identifie à des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.

I Définitions et premières propriétés

1) Définition des séries de Fourier

Définition 1. On pose $CM(\mathbb{T})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux, et $C(\mathbb{T})$ le sous-espace vectoriel formé des fonctions continues. On considère $L^p(\mathbb{T})$ comme identifié avec $L^p([0, 2\pi])$.

Définition 2. Les coefficients exponentiels de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ sont :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Les coefficients trigonométriques de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ sont :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\ ,\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \quad (n \in \mathbb{N})$$

Proposition 3. *Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :*

$$\begin{cases} c_n(f) &= \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \\ c_{-n}(f) &= \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{cases}$$

Proposition 4. *Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :*
- *(i) Si f est paire, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$ et $b_n(f) = 0$.*
- *(ii) Si f est impaire, $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$ et $a_n(f) = 0$.*

Exemple 5. *Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire et 2π-périodique définie par $f_1(t) = \frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|$ si $t \in [0, \pi]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$a_n(f_1) = 0\ ,\ b_{2n}(f_1) = 0\ ,\ b_{2n+1}(f_1) = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}$$

Exemple 6. *Soit $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire et 2π-périodique définie par $f_2(t) = \sin^2(t)$ si $t \in [0, \pi]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$a_n(f_2) = 0\ ,\ b_{2n}(f_2) = 0\ ,\ b_{2n+1}(f_2) = \frac{-8}{\pi(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

Exemple 7. *Soit $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et 2π-périodique définie par $f_3(t) = |t|$ si $t \in [-\pi, \pi]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$a_0(f_3) = \pi\ ,\ a_{2n}(f_3) = 0\ ,\ a_{2n+1}(f_3) = \frac{-4}{\pi(2n+1)^2}\ ,\ b_n(f_3) = 0$$

Définition 8. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On appelle série de Fourier de f la série :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on appelle somme de Fourier d'ordre N :

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

Exemple 9. $S(f_1)(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin((2n+1)t)}{(2n+1)^2}$

Exemple 10. $S(f_2)(t) = \frac{-8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)t)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

Exemple 11. $S(f_3)(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2}$

2) Premières propriétés

Proposition 12. *Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$, $a \in \mathbb{R}$ et $k, n \in \mathbb{Z}$. Alors :*
- *(i) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ (où $\check{f}(x) = f(-x)$)*
- *(ii) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$*
- *(iii) $c_n(\tau_a f) = e^{-ina}c_n(f)$ (où $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$)*
- *(iv) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)e_n$ (où $e_k(t) = t^{ikt}$)*

Exemple 13. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{1+\cos^2 t}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_{2n+1}(f) = 0$ et $c_{2n}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(2nt)}{1+\cos^2 t}\,dt$.*

Proposition 14. *Soit $f \in C(\mathbb{T})$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors $f' \in CM(\mathbb{T})$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f') = in\,c_n(f)$.*

Théorème 15 (Riemann-Lebesgue)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors $c_n(f)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $\pm\infty$.*

Corollaire 16. *Soient $k \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in C(\mathbb{T})$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors :*

$$c_n(f) = \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{|n|^k}\right)\ ,\ a_n(f) = \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^k}\right)\ ,\ b_n(f) = \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

II Convolution et noyaux trigonométriques

1) Produit de convolution

Définition 17. Soient $f, g \in CM(\mathbb{T})$. On appelle produit de convolution de f et g la fonction $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t - x) g(x)\, dx$$

Proposition 18. *Soient $f, g \in CM(\mathbb{T})$, alors :*

(i) $f * g \in CM(\mathbb{T})$

(ii) $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$

(iii) $\forall t \in \mathbb{R},\ (f * g)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) c_n(g) e^{int}$

(iv) $\forall n \in \mathbb{Z},\ f * e_n = c_n(f) e_n$

Proposition 19. *L'application $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un homomorphisme d'algèbre de $(L^1(\mathbb{T}), *, \|.\|_2)$ dans $(c_0(\mathbb{Z}), \cdot, \|.\|_\infty)$ continu et de norme 1.*

2) Noyaux trigonométriques

Définition 20. Soit $N \in \mathbb{N}$. La fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ est appelée noyau de Dirichlet d'ordre N.

Proposition 21. *(i) D_N est paire, 2π-périodique et vérifie :*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, dt = 1$$

(ii) D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \end{array}$$

(iii) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a $S_N(f) = f * D_N$.

Définition 22. Soit $N \in \mathbb{N}$. La fonction $F_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n$ est appelée noyau de Fejér d'ordre N.

Proposition 23. *Pour $N \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{T}$, on a :*

$$F_n(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2} t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2$$

Corollaire 24. *$(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'identité.*

III Convergence et séries de Fourier

1) Convergence de Fejér

Théorème 25 (Fejér)**.** *Pour $f \in C(\mathbb{T})$, la moyenne de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{T}$.*

Corollaire 26. *Tout élément de $C(\mathbb{T})$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

Corollaire 27. *Soit $f \in C(\mathbb{T})$. Si $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} = 0$, alors $f = 0$.*

2) Convergence dans L^2

Proposition 28. *Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, la somme $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N.*

Théorème 29 (Bessel)**.** *Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $N \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\|c_n(f)\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = \|f\|_2^2$$

Théorème 30 (Parseval)**.** *Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2$.*

Corollaire 31. *Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, $S_N(f)$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{T})$.*

3) Convergence de la série de Fourier

Théorème 32 (Dirichlet)**.** *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f}$ la régularisée de f. ($\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$)*

Exemple 33. *$(S_N(f_2))_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f_2, on a donc, pour tout $t \in \mathbb{T}$, que $f_2(t) = \frac{-8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)t)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$.*

Exemple 34. *$(S_N(f_3))_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f_3, on a donc, pour tout $t \in \mathbb{T}$, que $f_3(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2}$.*

Théorème 35. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.*

Exemple 36. *$(S_N(f_1))_{N\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers f_1, on a donc, pour tout $t \in \mathbb{T}$, que $f_1(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin((2n+1)t)}{(2n+1)^2}$.*

IV Applications

1) Calcul de sommes particulières

Exemple 37. *En évaluant f_1 en $\frac{\pi}{2}$, on obtient :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{puis} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exemple 38. *En appliquant la formule de Parseval à f_1, on obtient*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{puis} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

2) Formule sommatoire de Poisson

Théorème 39. *Soit $F : L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\hat{F}(n) = \int_{\mathbb{R}} F(t) e^{-int}\, dt$. On suppose :*

$$\exists M > 0,\ \exists \alpha > 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leqslant M(1+|x|)^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < +\infty$$

Alors on a la relation :

$$2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(2\pi n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n)$$

Application 40. *Pour tout $s > 0$, on a :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi k^2}{s}}$$

3) Équation de la chaleur sur le cercle

Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, on considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T} \\ u(0,.) = u_0 & \text{dans } L^2(\mathbb{T}) \end{cases} \tag{$*$}$$

Théorème 41. *Il existe une unique solution u de ($*$) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T}$, avec $u(t,.)$ tendant vers u_0 dans $L^2(\mathbb{T})$ quand t tend vers 0.*

Développements

- Formule sommatoire de Poisson (39,40) [Gou08]
- Équation de la chaleur sur le cercle (41) [Can09]

Références

[Amr11] Mohammed El Amrani. *Suites et séries numériques, Suites et séries de fonctions.* Ellipses, 2011

[Gou08] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses, 2008

[Can09] Bernard Candelpergher. *Calcul intégral.* Cassini, 2009